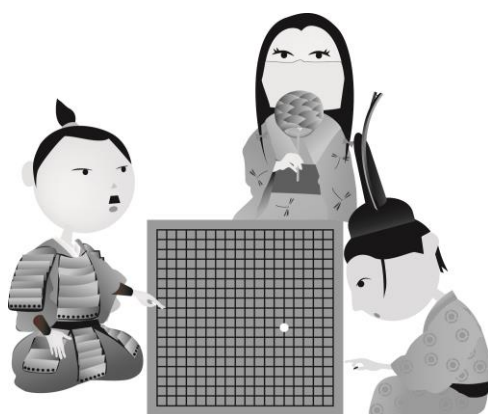
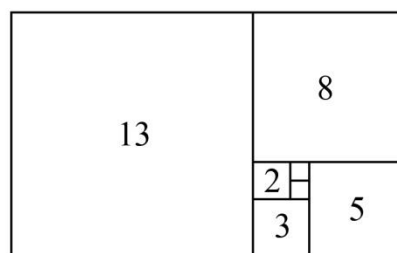
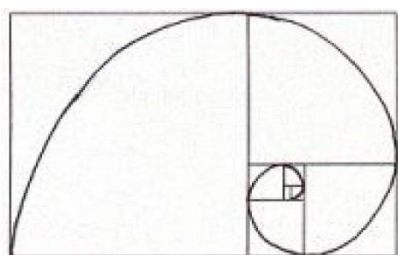


37 達文西的棋盤…聆聽上帝的美學

一幅對弈的畫，一場延續了五百年的棋局，…，唯有看穿永恆之美的人，才能獲得答案。這幅畫的場景是「國王和他忠誠的騎士對奕，一位神秘的黑衣女子在背後觀棋…。」而畫裡的棋局，不僅讓達文西喜愛不已，就連後來東方的鐵路工人也著迷。究竟棋局所留下的數學謎團是什麼呢？且讓我們來介紹。



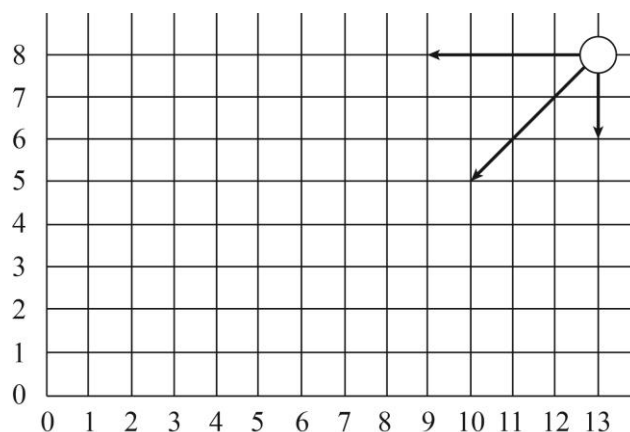
達文西在他的畫作中充分使用了黃金比例，在今日許許多多的事物也都遵循著這個比例在運作。例如傳統照片規格 3×5 ，廣角照片規格 4×7 及大小為 $15:9$ 的寬螢幕電腦等都是在談論不同長、寬比例的矩形，這種比例接近 1.618 的矩形稱為黃金矩形。



▲螺線與黃金比例

不知是人類 DNA 的遺傳或者是上帝的傑作，人類對這種大小尺寸的黃金矩形，特別情有獨鍾。當你拿出許許多多不同大小的矩形供小孩子挑選時，他們總是會挑到黃金矩形，就像真正的小法王總是可以選對圓寂法王所留下的法器一樣不可思議。人類這種與生俱來的審美天賦，可以運用在遊戲上擊敗對手嗎？讓我們以一道在圍棋棋盤上玩的遊戲作說明，這遊戲跟圍棋最大的差別是：只需一粒棋子就可以玩這道遊戲。

在圍棋的棋盤上放置一粒棋子，接著甲、乙兩人輪流移動這粒棋子，棋盤與移動規則如下：



- (1) 甲、乙輪流移動棋子。
- (2) 移動棋子的原則：每次只能將棋子往正下方、正左方或左斜下方移動，即每次只能從三個方向中選擇一種，但移動格子數需至少一格。
- (3) 將棋子移到原點者贏。

如果一開始將棋子擺在(13,8)的位置，那麼誰會贏得這場比賽呢？

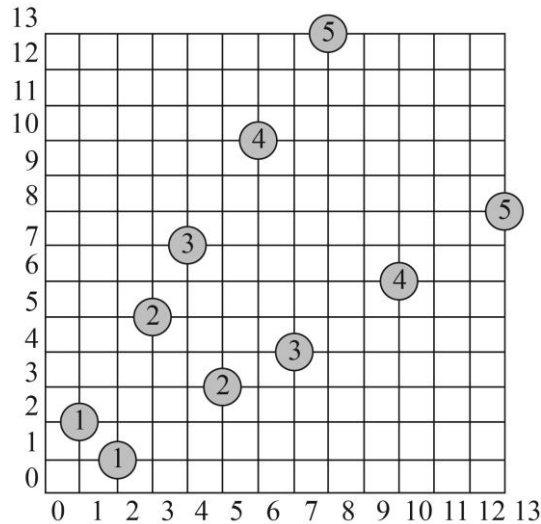
棋子的位置與原點可以圍出一個矩形，例如，在上圖中，當棋子落在(13,8)時，所圍出的矩形大小為 13×8 。當甲、乙兩人輪流移動棋子廝殺時，可以將眼光放在可構成黃金矩形的落點上，即

$$(1,2), (2,1), (3,5), (5,3), (4,7), (7,4), \dots, (9,15), (15,9), \dots$$

上。當你移動棋子讓它落在這些關鍵點時，會發現贏的機會特別高。也就是說，讓棋子落在賞心悅目的點上，就是克敵致勝的關鍵。但是，至少有兩個問題產生：

- (1) 讓它構成黃金矩形的格子點如何發現？規律為何？
- (2) 當我佔據關鍵點，對手就無法移動棋子到另一個關鍵點嗎？又下一輪我可以再佔到另一個關鍵點嗎？

其實，當你將棋子落在上述關鍵點時，就會贏得比賽，參考下圖：



顯然，當棋子落在(0, 0)點的向右水平方向，向上鉛直方向或右上對角方向時，只需一次移動就可以移到原點獲勝，所以把這三條射線上的點劃掉。在剩下的點中，離原點最近的兩個點為(1, 2)與(2, 1)，這是你可以贏的第一佔據位置。

接下來，將點(1, 2)與(2, 1)的向右水平方向，向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，在剩下的點中，離原點最近的兩個點為(3, 5)與(5, 3)，這是你可以贏的第二佔據位置。

同樣的，將點(3, 5)與(5, 3)的向右水平方向，向上鉛直方向及右上對角方向的點劃掉，在剩下的點中，離原點最近的兩個點為(4, 7)與(7, 4)，這是你可以贏的第三佔據位置。

如此繼續下去，就可以得到會贏的關鍵點

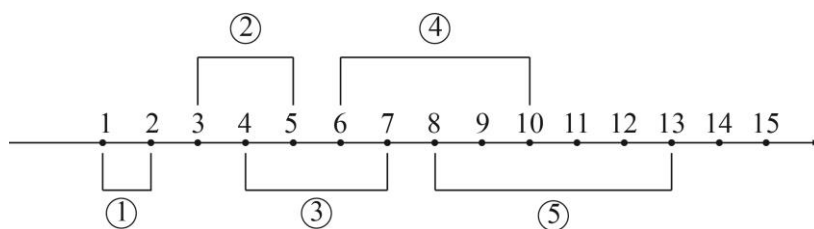
$$(6,10), (10,6), (8,13), (13,8), \dots$$

在玩的過程中，只需佔據這些要塞，必勝券在握。

每次這樣的劃線刪除很費時間，這裡提出比較簡單的方法：將所有的正整數

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \dots$$

標記在數線上如下



如上圖所示，從最小的 1 開始，取與它相距 1 單位的點 2 配成一對，得(1, 2)與(2, 1)。

接下來，從剩下最小的數 3 開始，取與它相距 2 單位的點 5 配成一對，得(3, 5)與(5, 3)。

同樣的，從剩下最小的數 4 開始，取與它相距 3 單位的點 7 配成一對，得(4, 7)與(7, 4)。如此繼續下去，就可以得到更多的關鍵數對，(6, 10), (10, 6);(8, 13), (13, 8);…; 等等。事實上，“一子棋遊戲”只是“拈”的另一種呈現方式，換湯不換藥，究竟什麼是“拈”呢？稍微介紹一下：「拈」這個遊戲本是中國民間的遊戲，英文叫做 Nim，大概這遊戲在當年大批華工到美國去做工，在工作之餘，撿石頭消遣或賭博時，被美國佬學了去。（當年的華工大部分是廣東人，而 Nim 是由廣東話「拈」（取物之意）轉音而來）。遊戲的規定是這樣的，石頭只有兩堆，每堆的個數隨玩者任意規定，兩人輪流取石頭，取的時候，需要任一堆中取一個或多個石頭，或者同時在兩堆取同樣個數的石頭，直到最後將石頭取光的人贏。“一子棋遊戲”的條件就是“拈”條件的不同呈現方式，我只是將它改頭換面，讓這道拿取石頭的“拈”可以在坐標平面上操作，讓它較為數學化而已。

一子棋這道遊戲是我在恆春當兵時發明的，當我駐守關山崖下的山海里時，在落山風相伴的晚上，與阿兵哥玩一子棋是無聊軍中生活裡的一大樂趣。

參考文獻

- [1] 張鎮華，拈及其各種變形遊戲，數學傳播第三卷第二期。
- [2] 李宗元、黃敏晃，一個名為「拈」的遊戲，科學月刊第七十期。
- [3] 許志農，古老的池塘，青蛙跳入，撲通！…一子棋的誘惑，《與奇人相遇的故事》。
- [4] 雷維特（陳慧瑛譯），法蘭德斯棋盤，漫遊者出版。